

*EL USO DE REPRESENTACIONES Y DE PROBLEMAS PARA LA ADQUISICIÓN DEL
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO DE FRACCIONES EN LA FORMACIÓN DE
MAESTROS*

A UTILIZAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES E PROBLEMAS PARA A AQUISIÇÃO DE CONHECIMENTOS
MATEMÁTICOS DIDÁTICOS SOBRE FRAÇÕES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

THE USE OF REPRESENTATIONS AND PROBLEMS FOR THE ACQUISITION OF MATHEMATICAL
DIDACTIC KNOWLEDGE ON FRACTIONS IN TEACHER EDUCATION

Eric Flores-Medrano, Dinazar Isabel Escudero-Ávila & Miriam Méndez Coca

Universidad Complutense de Madrid, España

mimend01@um.es

RESUMEN | Las fracciones es un contenido necesario para el aprendizaje matemático de los alumnos en la etapa escolar, en el cual experimentan diversas dificultades; por ello es importante cuidar la formación de los maestros para que puedan ofrecer una enseñanza apropiada de estas. Este artículo muestra una tarea de evaluación y formación del conocimiento didáctico matemático de las operaciones con fracciones: suma, resta, multiplicación y división. La tarea consiste en que los estudiantes propongan problemas de operaciones aritméticas con fracciones y los resuelvan utilizando un material manipulativo de barras o sectores realizado previamente. Los resultados obtenidos muestran que tienen más dificultad para proponer problemas de división de fracciones que de otras operaciones; que mantienen el concepto de las operaciones aritméticas y que el conocimiento algorítmico numérico de las operaciones con fracciones adquirido previamente puede afectar a la conversión a otro tipo de resolución utilizando otro tipo de representación.

PALABRAS CLAVE: Formación de profesores, MTSK, Matemáticas, Resolución de problemas, Representaciones.

RESUMO | As frações são um conteúdo necessário para a aprendizagem matemática dos alunos na fase escolar, na qual estes experimentam várias dificuldades; por conseguinte, é importante cuidar da formação dos professores para que possam oferecer um ensino adequado dos mesmos. Este artigo mostra uma tarefa de avaliação e formação do conhecimento didático matemático sobre as operações de frações: adição, subtração, multiplicação e divisão. A tarefa consiste em estudantes proporem problemas de operações aritméticas de frações e resolvê-los utilizando um material manipulador de barras ou sectores previamente feitos. Os resultados obtidos mostram que têm mais dificuldade em propor problemas de divisão de frações do que outras operações; que mantêm o conceito de operações aritméticas e que o conhecimento numérico previamente adquirido de operações de frações pode afetar a conversão para outro tipo de resolução utilizando outro tipo de representação.

PALAVRAS-CHAVE: Formação de professores, MTSK, Matemática, Resolução de problemas, Representações.

ABSTRACT | Fractions is a necessary content for the mathematical learning of students in the school stage, in which they experience various difficulties; therefore, it is important to take care of the training of teachers so that they can offer an appropriate teaching of these. This article shows a task of evaluation and formation of the mathematical didactic knowledge of the operations with fractions: addition, subtraction, multiplication, and division. The task consists of students proposing problems of arithmetic operations with fractions and solving them using a manipulative material of bars or sectors previously made. The results obtained show that they have more difficulty in proposing fraction division problems than other operations; that they maintain the concept of arithmetic operations and that previously acquired numerical algorithmic knowledge of operations with fractions can affect the conversion to another type of resolution using another type of representation.

KEYWORDS: Teacher education, MTSK, Mathematics, Problem-solving, Representations.

1. INTRODUCCIÓN

Entender y saber usar de forma adecuada las fracciones es clave para el buen rendimiento matemático escolar de los alumnos durante su etapa escolar y también para otros ámbitos de su vida (Bayley et al., 2012; Empson et al., 2011; Behr et al., 2007). Sin embargo, es un contenido que es experimentado como difícil de aprender por los estudiantes y como difícil de enseñar por los maestros (Lortie-Forgues et al., 2015; Gabriel et al., 2013; Both et al., 2012; Newton, 2008). La diversidad de usos que le podemos dar a las fracciones; las diferencias con el conjunto de los números naturales y la enseñanza focalizada en automatizar correctamente los algoritmos de las operaciones aritméticas con fracciones por encima de su comprensión conceptual son causa de estas dificultades (Braithwaite et al., 2017; Obersteiner et al., 2015; Gabriel, 2013; Prediger, 2008; Kerslake, 1986).

La investigación y la práctica han aportado sus experiencias, análisis, reflexiones y propuestas. Van de Walle et al. (2016) recomiendan dar a conocer a los alumnos todos los significados de las fracciones para alcanzar un adecuado conocimiento de ellas: como parte-todo, como medida, como número, como operador y como razón. Behr et al. (1983) sugieren una enseñanza centrada en desarrollar la comprensión conceptual utilizando diferentes modelos de fracciones, representaciones de ellos y realizando una reflexión sobre el efecto de estos en el aprendizaje de los alumnos. Así también podríamos citar experiencias y materiales ofrecidos por maestros para la enseñanza de las fracciones como los recogidos en el dossier de Canals (2009).

Las dificultades que encuentran los alumnos de Educación Primaria en el aprendizaje de estos contenidos matemáticos, las orientaciones didácticas que pueden favorecer su adquisición, ejemplos de recursos y actividades fundamentadas en la investigación y en la experiencia de práctica del aula, los estándares de aprendizaje del currículo, los conocimientos conceptuales matemáticos, procedimentales y de conexiones de los números racionales son contenidos de formación de los futuros maestros de primaria para que estos desarrollen propuestas adecuadas a su enseñanza y adaptadas a contextos que se puede encontrar. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas es el que necesita este profesional para enfrentar esta tarea. El modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) ayuda al diseño, implementación y evaluación de propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas (Carrillo-Yañez et al., 2018). Este modelo parte de las reflexiones y categorizaciones de las investigaciones de Shulman (1986, 1987).

Este artículo describe el diseño, implementación y evaluación de una tarea formativa de fracciones en el Grado de Maestro en Educación Primaria de una universidad pública española que tiene como fin dotar, al futuro maestro, de la comprensión de las operaciones con fracciones a través del uso de representaciones y problemas; y evaluar su adquisición. Estos contenidos forman parte de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II que es una de las tres asignaturas obligatorias a través de las cuales la Universidad Complutense de Madrid organiza la adquisición de las competencias disciplinares específicas del área de conocimiento de didáctica de las matemáticas.

2. FUNDAMENTO Y CONTEXTO

Shulman (1986) describió el conocimiento del contenido del profesor y la importancia de prestar atención a este “paradigma perdido” para así mejorar la formación de este. Además, aporta una primera categorización de este saber en: el *conocimiento del contenido* que el maestro imparte, que se refiere a la comprensión profunda de los temas a enseñar y de las representaciones que se pueden utilizar, las propiedades, los teoremas, las definiciones, las estructuras y los procedimientos; el *conocimiento pedagógico del contenido* que abarca las teorías de enseñanza y de aprendizaje del mismo, los recursos materiales y virtuales que se pueden utilizar, las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje, los ejemplos y la forma de hacer accesible, comprensible y útil el contenido; y un *conocimiento curricular* de la materia, que incluye los estándares de aprendizaje de la materia. Modelos e investigaciones posteriores tratan de describir con mayor precisión, fundamentar y proponer cuestiones no aclaradas en este modelo inicial (Berry et al., 2016). Otro de los temas que ha despertado el interés de la comunidad investigadora es el de la progresión de desarrollo de este conocimiento didáctico del contenido, describiendo su avance y el efecto que la práctica y la formación tiene en el mismo (Gallagher et al., 2020, Shulman, 2015; Abell, 2007).

2.1 Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El marco analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) aborda las cuestiones presentadas anteriormente. Distingue dos dominios: el *Conocimiento Matemático* (MK) y el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK). Dentro del *Conocimiento Matemático* (MK) se distinguen tres subdominios: el *Conocimiento de los Temas* (KoT), que abarca las definiciones, las representaciones, los procedimientos, las propiedades, la fenomenología, las aplicaciones y la fundamentación de los temas matemáticos a enseñar; el *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* (KSM), que incluye las relaciones entre los diferentes temas matemáticos y también con otras áreas de conocimiento, las conexiones de simplificación y complejización; y el *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM), es decir, de los procesos y las capacidades del trabajo matemático. En el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) se diferencian tres subdominios: el *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), que incluye las teorías de enseñanza del contenido matemático, la potencialidad y la limitación de los recursos, las tareas, los ejemplos y los modelos que puede utilizar el profesor en la enseñanza del contenido matemático; el *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM), que envuelve las teorías de aprendizaje de los contenidos específicos matemáticos y de la matemática en general, las dificultades de aprendizaje y la motivación que pueden experimentar los aprendices; y el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS) que engloba el conocimiento curricular de los contenidos, la progresión del conocimiento especificado así como los objetivos desarrollados por otras entidades externas como asociaciones de investigadores y profesores (Carrillo et al., 2013; Vasco-Mora et al., 2016; Muñoz-Catalán et al., 2019; Méndez et al., 2021). Además, en este modelo analítico también están representadas las creencias y las concepciones del profesor sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y aprendizaje que influyen en este conocimiento y en la práctica. En la Figura 1 observamos la representación de este modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

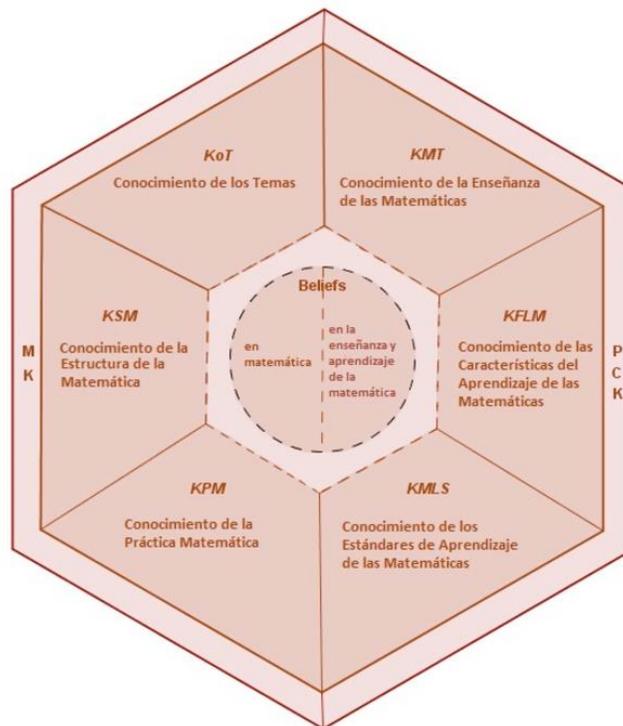


Figura 1 Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Extraído Carrillo et al. (2018)

2.2 El aprendizaje y la enseñanza de las fracciones

Las recomendaciones de Petit y compañeros (2015; 2022) para la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones aritméticas de la suma/resta, la multiplicación y la división con fracciones es alcanzar una fluidez procedimental al mismo tiempo que una comprensión conceptual de las misma. Para ello proponen utilizar representaciones visuales de los modelos de fracciones y asegurar la comprensión adecuada de los contenidos previos necesarios.

Bruce et al. (2013) proponen para la enseñanza de la suma/resta, desarrollar unas habilidades y conocimientos previos necesarios como: la fracción unitaria, la fracción equivalente, la fracción como parte-todo; y haber alcanzado fluidez en: la representación de fracciones, la comparación, el orden, la estimación de ellas y el uso de las propiedades de las operaciones. Para alcanzar una buena comprensión de la suma/resta de fracciones recomiendan utilizar representaciones visuales de fracciones como los modelos lineales y de área. Además, proponen cierta graduación de los contenidos, desde la suma/resta de fracciones con el mismo denominador, donde se suman/restan los numeradores; seguidamente de la adición/substracción de fracciones propias unitarias con diferente denominador pasando previamente a las fracciones equivalentes con igual denominador; y finalmente abordar la suma/resta de fracciones impropias (con el numerador mayor que el denominador) o números mixtos.

Los algoritmos de la multiplicación y la división de fracciones oscurecen el significado de estas operaciones. Las diferencias con la multiplicación y división de números naturales pueden suponer un obstáculo para la comprensión de las mismas. La investigación sugiere que los

alumnos interactúen con una variedad de situaciones que incluyan la división partitiva y cuotitiva de fracciones (Petit et al., 2015) y la comprensión de que la división es la operación inversa de la multiplicación (Flores, 2002). Varios autores insisten en la utilización de representaciones gráficas para mejorar la comprensión de estos algoritmos (Klemer et al., 2019; Izsak, 2008). Además, utilizar diferentes procedimientos para resolver la división de fracciones: como pasar a fracciones equivalentes con igual denominador como paso previo a realizar la división de fracciones, teniendo que realizar solo la división de los numeradores; o multiplicar por el inverso de la fracción divisor.

Algunas de las dificultades que experimentan los alumnos en el aprendizaje de las fracciones son debidos a sus conocimientos previos sobre los números naturales, ya que las propiedades no se pueden extender a los números racionales (Braithwaite et al., 2017; Obersteiner et al., 2015; Siegler et al., 2011; Ni et al., 2005). Hay alumnos que hacen la suma/resta de fracciones como la suma/resta de numeradores y denominadores como si fueran números separados (Pitkethly et al., 1996) lo que denota que el concepto de fracción no se ha adquirido.

2.3 El papel de las representaciones en matemáticas

La capacidad de reconocer un concepto matemático en múltiples sistemas de representación es esencial en la adquisición del mismo (Goldin, 2003; Lesh et al., 1987). La literatura ha dado importancia al uso de una variedad de representaciones adecuadas en la construcción de la comprensión de fracciones (Lamon, 2001). La flexibilidad representacional implica: 1) la manipulación que hacemos de la representación considerando su significado matemático; 2) la conversión de un sistema de representación a otro manteniendo la asociación al objeto matemático representado; y 3) el reconocimiento del concepto matemático en un sistema de representación y la capacidad de representación de un contenido. La habilidad de pasar de un sistema de representación de un objeto matemático a otro e interactuar con la representación de forma procedimental y conceptualmente se considera un tipo de razonamiento matemático flexible (Thomas, 2008). Estos componentes de la flexibilidad matemática están conectados con la capacidad de resolución de problemas de fracciones (Deliyianni et al., 2016). Según las investigaciones de Deliyianni et al. (2016), la flexibilidad representacional y la habilidad de resolución de problemas son los mayores componentes que afectan al pensamiento representacional de los contenidos de suma y resta de fracciones.

Los modelos de fracciones propuestos por Behr et al. (1983) son: el modelo continuo lineal; el modelo continuo de área y el modelo discreto. Behr et al. (1992) explican que cuando los estudiantes establecen relaciones entre las representaciones visuales de los modelos y los algoritmos, pueden entender qué representa cada paso del algoritmo de las operaciones.

Aprender por medio de la resolución de problemas y de proponer problemas desarrolla la comprensión de las ideas matemáticas (Lambdin, 2003; Xie et al., 2017). La capacidad de resolver problemas implica conversiones flexibles con preservación del significado de un sistema de representación a otro (Hitt, 1998). Acevedo et al. (2009) sostienen que las estrategias de resolución de problemas están estrechamente relacionadas con las representaciones ya que ciertas representaciones hacen que se utilicen estrategias específicas de ellas.

La resolución de problemas y el diseño de problemas son dos capacidades que se benefician mutuamente (Xie et al., 2017). Proponer problemas ayuda a los alumnos a: mejorar la comprensión conceptual de los contenidos matemáticos, favorecer su motivación hacia las

matemáticas y desarrollar un pensamiento matemático más creativo (Singer et al. 2013; Leung et al., 1997; Silver, 1997). Para proponer un problema se suele modificar los datos, objetivos y restricciones de un problema dado (Silver et al., 1996; Brown et al., 1983).

3. DESCRIPCIÓN DE LA PRÁCTICA EDUCATIVA Y SU IMPLEMENTACIÓN

La asignatura obligatoria donde se han desarrollado la práctica que a continuación se describe es *Matemáticas y su Didáctica II, del Grado de Maestro en Educación Primaria*. Los alumnos que cursan esta asignatura han estudiado anteriormente los contenidos de la asignatura de *Matemáticas y su Didáctica I* centrada en los números naturales, en las operaciones aritméticas y los problemas aritméticos verbales de adición y de multiplicación en el contexto de números naturales, los materiales físicos y virtuales que favorecen la comprensión del número natural y de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

3.1 Guía docente de la asignatura

La guía docente de la asignatura se puede consultar en (<https://educacion.ucm.es/estudios/grado-educacionprimaria-plan-800441>) donde se especifican las competencias que se desean alcanzar, los objetivos, los contenidos, los criterios de calificación y la bibliografía.

Los objetivos de la asignatura recogidos en la guía docente son:

- Proporcionar al futuro profesor elementos de análisis y reflexión que le permitan abordar un correcto tratamiento de los contenidos matemáticos de la enseñanza Primaria.
- Ampliar los conocimientos teóricos que el alumno tiene sobre los contenidos de la asignatura.
- Capacitar al alumno para la construcción y elección de las situaciones didácticas adecuadas a la enseñanza de los distintos conceptos matemáticos, analizando las variables didácticas correspondientes.
- Capacitar al futuro maestro para analizar, seleccionar y construir materiales didácticos apropiados a los contenidos matemáticos de la Educación Primaria.

Las competencias generales y específicas que guían la instrucción son:

- General: Diseñar estrategias didácticas adecuadas a la naturaleza del ámbito científico concreto, partiendo del currículo de Primaria para el área de Matemáticas.
- Específica 1: Comprender los principios básicos y fundamentos de las Matemáticas básicas.
- Específica 2: Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, estimación y medida).
- Específica 3: Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- Específica 4: Valorar distintas estrategias metodológicas adecuadas a las diferentes áreas del conocimiento en Matemáticas.
- Específica 5: Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- Específica 6: Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.

- Específica 7: Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.
- Específica 8: Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

3.2 Tareas formativas para la enseñanza de las operaciones con fracciones

La tarea tiene dos partes:

A) Elaborar un material físico para representar fracciones en barras o en sectores. Se propone que elaboren varias barras o sectores de fracciones con el material que escojan (goma eva, cartulina, etc.) de las dimensiones que ellos decidan siempre que la representación de la unidad sea de igual longitud/área y cada una de las fracciones iguales tengan la misma longitud/área, es decir, las barras o sectores de $\frac{1}{2}$ deben ser de igual longitud/área, las barras o sectores de $\frac{1}{3}$ iguales, las barras o sectores del $\frac{1}{4}$ iguales, y así sucesivamente. Además, la unidad formada por las dos barras $\frac{1}{2}$ debe ser de igual longitud/área a la unidad formada por las tres barras de $\frac{1}{3}$ o la unidad formada por las cuatro barras de $\frac{1}{4}$...

B) Diseñar problemas de operaciones aritméticas con fracciones de: suma, resta, producto de una fracción por un número entero, producto de dos fracciones, división de un número entero entre una fracción, división de una fracción entre un número entero, división entre fracciones. Tienen que grabarse resolviendo los problemas utilizando el material elaborado.

Esta tarea se realiza durante cuatro semanas, parte en la sesión de aula y parte fuera de ella, en grupos de 4-6 personas. La calificación de la misma se realiza a partir de la calidad del material entregado, de los problemas propuestos y de la resolución de los problemas realizada.

La tarea pretende favorecer la formación matemática y didáctica del alumno en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza de las fracciones utilizando problemas y material manipulativo buscando dar significado a las operaciones aritméticas con fracciones y a los algoritmos de estas. Esta tarea pretende contribuir a la consecución de los objetivos y competencias recogidos en la guía de la asignatura.

3.3 Resultados de la tarea formativa

El material diseñado por ellos preferiblemente fue las barras de fracciones por encima de los sectores. Algunos de estos materiales carecían de la precisión de medida que deberían tener; bien porque los mismos no eran apropiados porque se dilataban al cortarlos, o bien por la falta de habilidad de los alumnos para medir o cortar, o bien por la poca importancia de la precisión de la medida. A cinco de los trece grupos hubo que decirles que fueran más precisos. Los materiales preferidos por los alumnos fueron las cartulinas de colores (Figura 2). Algunos de ellos también utilizaron la goma eva. Varió el tamaño de las fracciones recortadas.

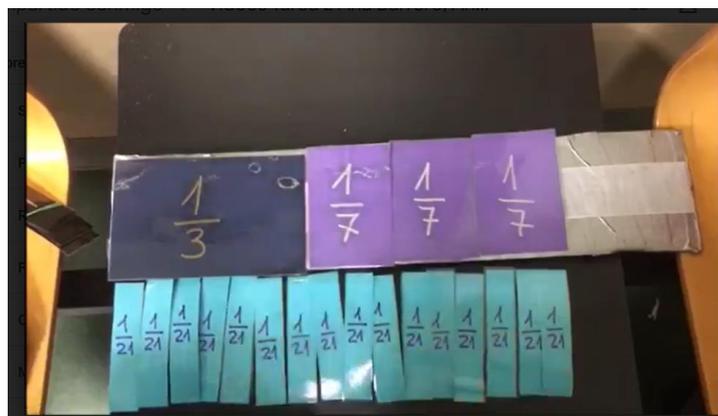


Figura 2 Materiales de fracciones fabricado por los alumnos

La propuesta y la resolución de problemas de suma y resta con fracciones mostraron menos errores que la propuesta y la resolución de problemas de multiplicación y de división. Una de las dificultades fue que, al estar utilizando un material de fracciones de la unidad, los alumnos no propusieron problemas de fracciones de una cantidad mayor a la unidad. Los alumnos no representaron más de un procedimiento de resolución. Además, los resultados de la tarea evidenciaron, en ocasiones, una falta de precisión y rigor en algunas explicaciones que aparecen en los vídeos por parte de los alumnos, en la elaboración del material y en el diseño de los problemas. A continuación, mostramos algunos ejemplos.

Problema de suma de fracciones: De todos los juguetes de una habitación $\frac{1}{3}$ son de Marta y $\frac{4}{6}$ de su hermano Hugo. ¿Cuál es la fracción total de juguetes que tienen entre los dos?

De todos los juguetes de una habitación $\frac{1}{3}$ son de Marta y $\frac{4}{6}$ de su hermano Hugo. ¿Cuál es la fracción total de juguetes tienen entre los dos?

De todos los juguetes de una habitación $\frac{1}{3}$ son de Marta y $\frac{4}{6}$ de su hermano Hugo. ¿Cuál es la fracción total de juguetes tienen entre los dos?

Figura 3 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de suma de fracciones de diferente denominador y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

En la Figura 3 se muestra un problema de suma de fracciones propuesto y resuelto. La suma de fracciones $\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$ la realizan a través de pasar la fracción $\frac{1}{3}$ a la fracción equivalente $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$ en vez de simplificar la fracción $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ y hacer $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. Vemos una forma ordenada de mostrar la información del problema.

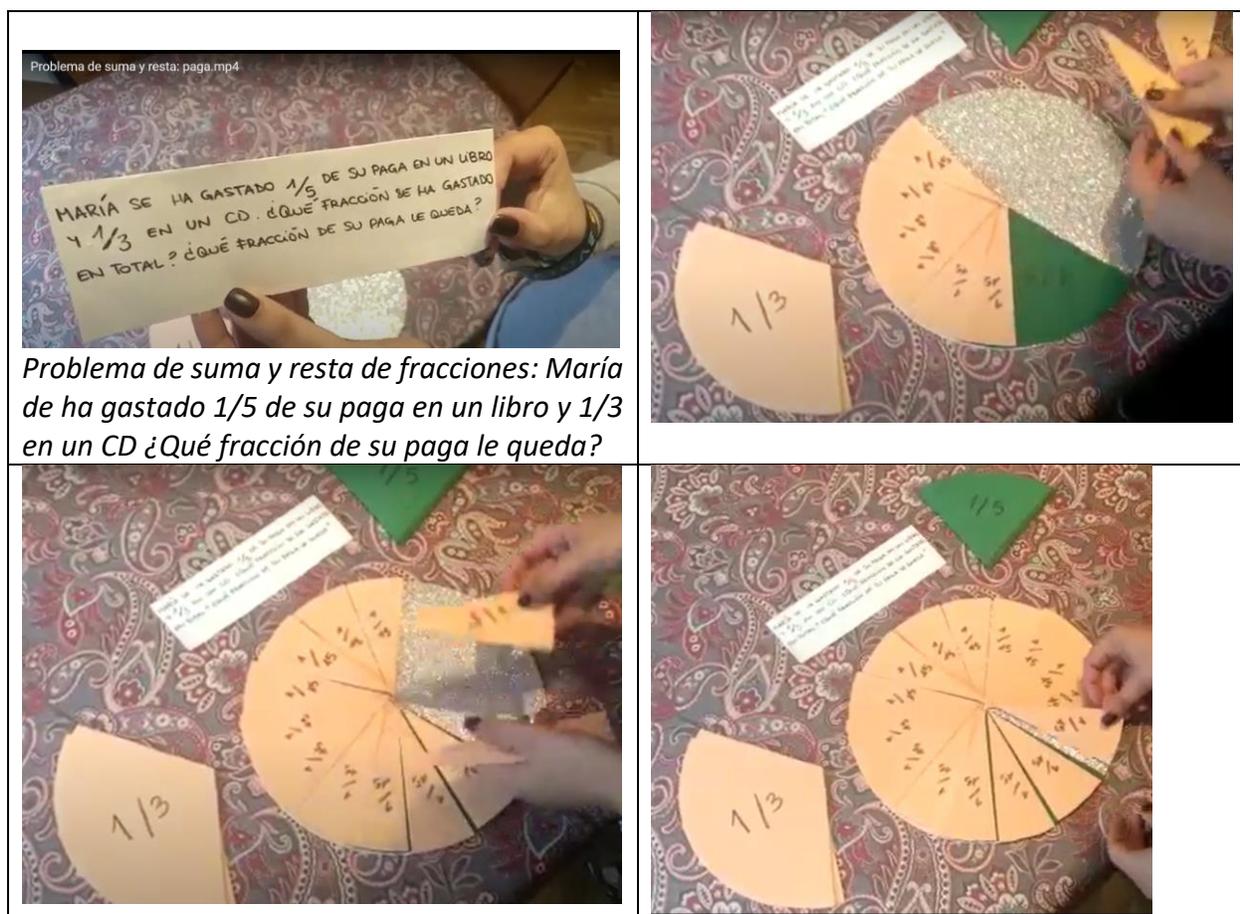


Figura 4 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de suma y resta de fracciones de diferente denominador y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

En la Figura 4 se plantea un problema de suma y resta de fracciones. Primero realiza la suma de las fracciones $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ pasando a fracciones equivalentes $\frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$ con los sectores sobre la fracción unidad que representa la cantidad de dinero total de su paga. Para responder a la pregunta “¿qué fracción de su paga le queda?” completan la unidad con los quinceavos que les quedan, representando la resta de fracciones como la distancia que hay entre los $\frac{8}{15}$ y los $\frac{15}{15}$.

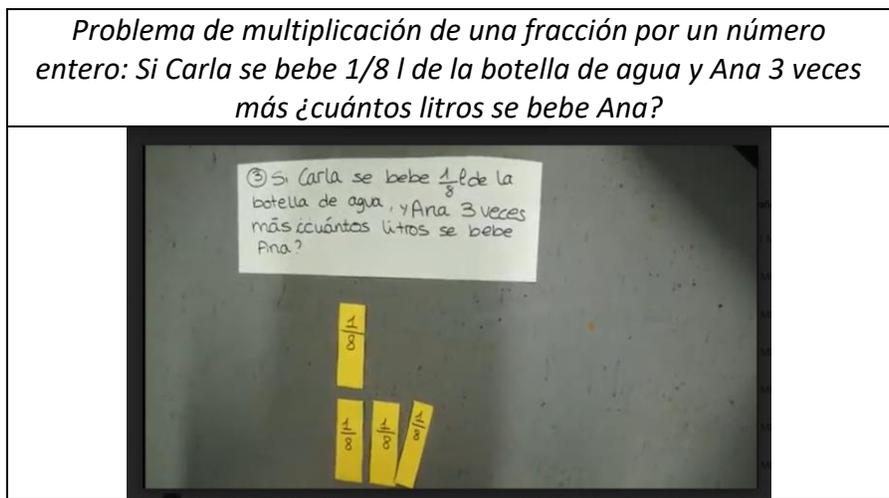


Figura 5 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de multiplicación de una fracción por un entero y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

La Figura 5 muestra un problema de una multiplicación de una fracción por un entero, representando la multiplicación de como suma de iguales: $3 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$.

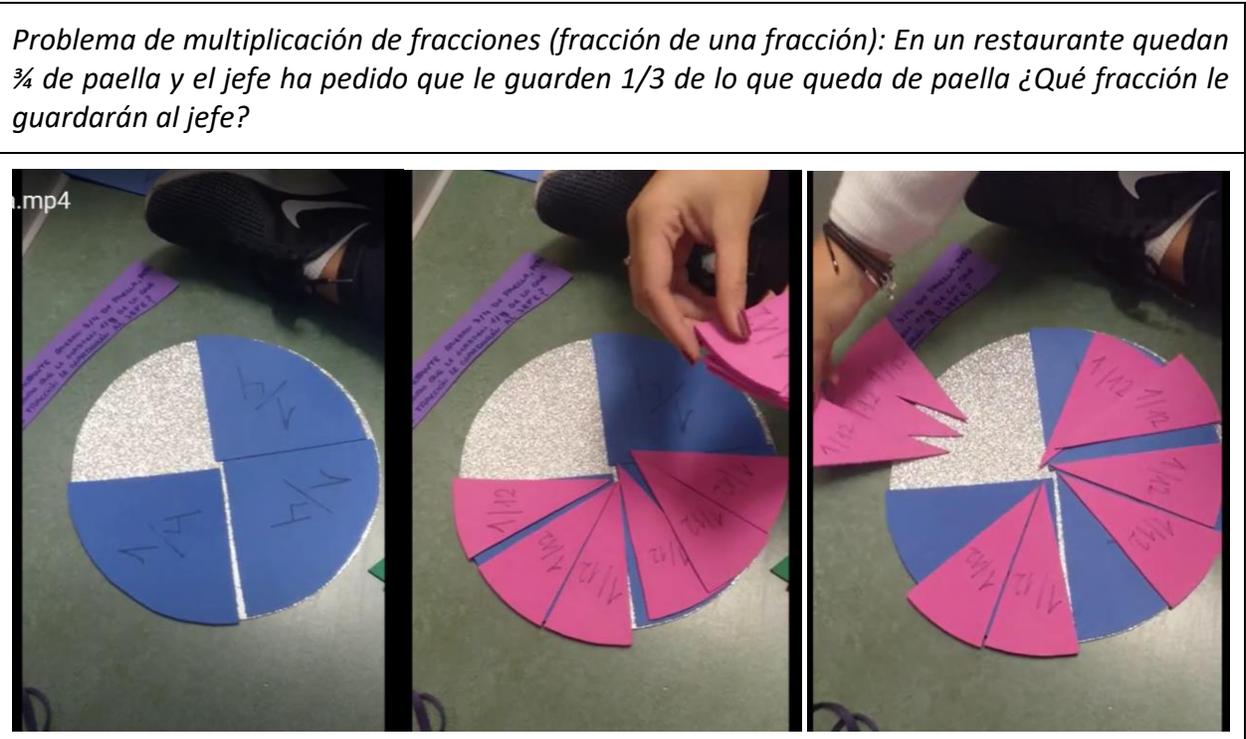


Figura 6 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de multiplicación de fracciones y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

En el problema de la Figura 6, de multiplicación de fracciones, la resolución aritmética guía su resolución manipulativa. Cada cuarto lo pavimenta con tres $\frac{1}{12}$ y luego selecciona $\frac{1}{12}$ de cada uno de ellos. La fracción resultado es $\frac{3}{12}$ no la simplifica. Sin embargo, tomar un tercio de $\frac{3}{4}$ manipulativamente podría ser tomar $\frac{1}{4}$, pero el grupo no muestra este tipo de resolución.

Problema Dado el siguiente rectángulo de base $\frac{1}{5}$ y de altura $\frac{3}{8}$ calcula la superficie

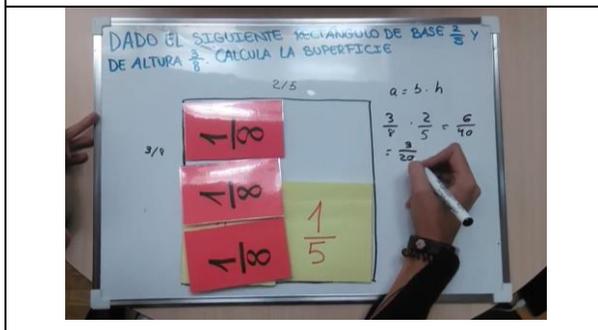


Figura 7 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de multiplicación de fracciones y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

En el problema de la Figura 7 vemos que han planteado un problema de multiplicación de fracciones, para el cálculo del área de un rectángulo, pero lo resuelve aritméticamente y no con los materiales; estos solo los utilizan para representar los datos. En el problema no utiliza unidades de longitud.

Problema división de fracciones: Sofía compró un queso que pesaba $\frac{3}{4}$ de kilo Si lo partió en porciones de $\frac{1}{8}$ de kilo cada una ¿Cuántas porciones pudo sacar?

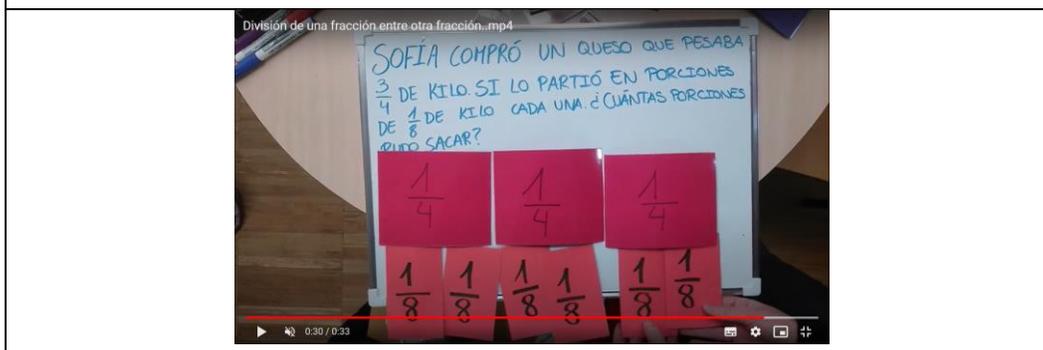


Figura 8 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de división de fracciones y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

La Figura 8 resuelve un problema de división de una fracción entre otra, de forma manipulativa, utilizando el significado de la operación de división cuotitiva, viendo cuántos $\frac{1}{8}$ le caben en $\frac{3}{4}$, midiendo, en vez de realizarlo como lo podrían realizar aritméticamente $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{24}{4} = 6$.

Problema de división de fracción entre un entero: De la fiesta de cumpleaños, sobraron $\frac{8}{15}$ de la tarta. Se lo quieren comer, a partes iguales, entre Carlos, Ana, Ignacio y Carmen ¿Qué fracción de tarta se comen cada uno?

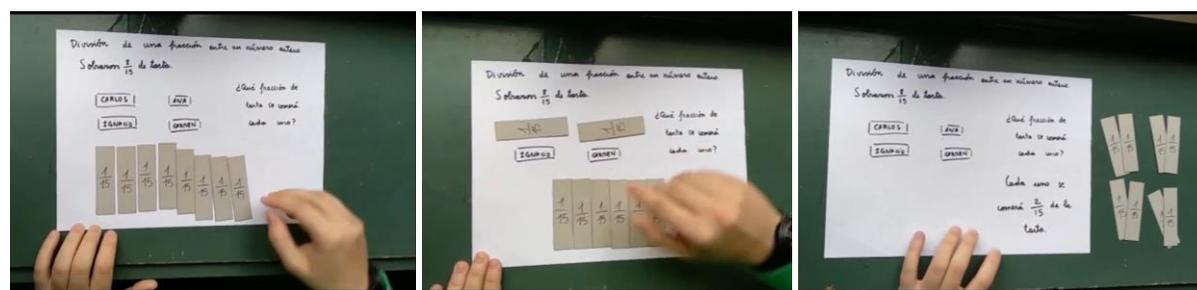


Figura 9 Ejemplo de problema propuesto por los alumnos de división de una fracción entre un número natural y de su resolución con los materiales fabricados por ellos

En la Figura 9 se presenta un problema de división de una fracción entre un número entero, división por reparto, propuesto por los alumnos. Lo han resuelto a partir del reparto de fracciones, 8 trozos de $\frac{1}{15}$ entre 4 personas. La resolución está bien hecha, pero podrían haber propuesto el problema de reparto entre 3 personas para mostrar un procedimiento más genérico.

4. EVALUACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA PRÁCTICA Y PRINCIPALES RESULTADOS

Es una tarea formativa y evaluativa que se complementa con otras tareas de resolución de problemas a través de representaciones gráficas, verbales y aritméticas. Este tipo de tareas evidencia un conocimiento matemático (MK) y un conocimiento didáctico del contenido (PCK) del futuro maestro; sobre los significados de las operaciones, los procedimientos algorítmicos, tipos de problemas aritméticos, conocimientos sobre el diseño de problemas, sobre la resolución de problemas y la utilización de materiales. Los resultados mostrados favorecen la reflexión del formador sobre las dificultades de los alumnos en la comprensión de las operaciones con fracciones, la conversión de representaciones y sobre ofrecer una única forma de resolver los problemas, sin explorar formas distintas. Las dificultades de proponer problemas pueden estar en la falta de experiencia de los alumnos o en la falta de comprensión de las fracciones y las operaciones aritméticas (Xie et al., 2017). La grabación del vídeo les hizo buscar formas de explicar su saber de la forma más sencilla y clara. Con la utilización de materiales y problemas se pretende que ellos valoren la enseñanza conceptual además de la procedimental y la utilización de estos recursos para este fin. El uso de materiales favorece la comprensión de las operaciones y permite, en ocasiones, que emerjan procedimientos distintos de los que realizan con la representación numérica. Es importante trabajar con los alumnos la conversión de los procedimientos de un sistema de representación a otro y animarles a explorar nuevas formas de resolución. Además, el marco del MTSK favorece una mirada analítica del formador, según las categorías propuestas, sobre el diseño de la tarea y los resultados alcanzados.

5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

En los programas de formación de maestros las tareas son el instrumento para alcanzar el conocimiento y las competencias necesarios para enseñar matemáticas (Llinares, 2011). Es importante dotar a los futuros profesores de un conocimiento matemático (MK) y un conocimiento didáctico del contenido (PCK) para que puedan diseñar, implementar y evaluar propuestas para la enseñanza de las operaciones con fracciones adecuadas a los diversos contextos de trabajo. Para ello, es importante el conocimiento curricular, de las teorías de aprendizaje y enseñanza, de las dificultades de aprendizaje, de los recursos materiales, de los modelos. El modelo de categorías del MTSK favorece la atención del formador a los distintos aspectos que conforman el conocimiento del maestro de matemáticas para promoverlo a través de las tareas. Los futuros docentes tienen que profundizar en sus conocimientos didáctico matemático para poder ofrecer una enseñanza que desarrolle una comprensión conceptual al mismo tiempo que una fluidez procedimental (Petit et al., 2015). La investigación recomienda el uso de materiales visuales para favorecer la comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas con fracciones (Klemer et al., 2019; Behr et al., 1992), identificando las dificultades que experimenta el alumno en este aprendizaje debido a las diferencias con los conocimientos previamente aprendidos de los números naturales. Es importante que los futuros maestros experimenten con estos recursos materiales y desarrollen habilidad para la conversión de los procedimientos de resolución de operaciones de un sistema de representación a otro y cierta flexibilidad matemática procedimental (Xie et al., 2017; Singer et al., 2013; Acevedo et al., 2009). Para ello además de los materiales, o de las representaciones gráficas, la tarea de proponer problemas de operaciones con fracciones y resolverlos con diferentes representaciones favorece la comprensión de las operaciones.

La reflexión sobre el diseño de las tareas formativas y el análisis de los resultados requiere de una consideración previa y posterior de la práctica y la investigación que favorece el refinamiento de estas tareas. Los formadores necesitamos la investigación, pero también la experiencia del aula para poder ofrecer propuestas fundamentadas y probadas cercanas a la realidad de nuestros alumnos (Joglar et al., 2022).

AGRADECIMIENTOS/APOYOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto: “Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: tareas y conocimiento del formador” (PID2021.122180B-100, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España). Asimismo, está vinculado a la Red MTSK, auspiciado por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

- Abell, S. K. (2007). Research on science teacher knowledge. In S. Abell & N. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education* (pp. 1105–1149). Lawrence Erlbaum Associates
- Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: A critical review. *ZDM Mathematics Education*, 41, 627–636.
- Bayley, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113 (3), 447-455. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004>
- Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed., pp. 201–248). Allyn & Bacon
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). Academic Press Disponible: https://www.researchgate.net/publication/258510439_Rational_number_concepts [accessed Oct 29 2022].
- Berry, A., Depaepe, F., & Driel, J. H. (2016). Pedagogical content knowledge in teacher education. In: L. Loughran, & M. Hamilton (eds.) *International Handbook of Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-0366-0_9
- Both, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001>
- Braithwaite, D., Pyke, A., & Siegler, R. (2017). A computational model of fraction arithmetic. *Psychological Review*, 124(5), 603–625. doi: 10.1037/rev0000072
- Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). The “What-if-not” strategy in action. In S. I. Brown & M. I. Water (Eds.), *The art of problem posing* (pp. 65–105). Franklin Institute Press.
- Bruce, C., Chang, D., Flynn, T. & Yearley, S. (2013). *Foundations to learning and teaching fractions: Addition and subtraction*. Retrieved July, 4, 2014. <http://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/2021/01/FINALFoundationstoLearningandTeachingFractions.pdf>
- Canals, M.A. (2009). *Fracciones (Los dossiers de María Antonia Canals)*. Associació de Mestres Rosa Sensat.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in mathematics Education*, 8 (pp.2985-2994). ERME.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253, <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I, & Panaoura, A. (2016). Representational Flexibility and Problem-Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2), 397–417. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9625-6>
- Empson, S. B., Levi, L. & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai y E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 409–428). Springer
- Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litweller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). National Council of Teachers of Mathematics Inc.
- Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carrette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4: 715. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>
- Gallagher, M. A., Parsons, S. A., & Vaughn, M. (2020): Adaptive teaching in mathematics: a review of the literature, *Educational Review*, 74(2), 298-320. <https://doi.org/10.1080/00131911.2020.1722065>

- Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–285). The National Council of Teachers of Mathematics.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123–134.
- Izsak, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95–143. <https://doi.org/10.1080/07370000701798529>.
- Joglar-Prieto, N., Belmonte, J. M., Pizarro, N., Ramírez, M., Boga, T., Marcos, J. A., Lorenzo, L., Ruiz, L., & Mendez, M. (2022). Oportunidades de desarrollo profesional conjunto en un entorno colaborativo con maestros, formadores de maestros e investigadores en educación matemática. *APEduc Journal*, 3(1), 120-133.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd
- Klemer, A., Rapoport, S., & Lev-Zamir, H. (2019). The missing link in teachers' knowledge about common fractions division. *International Journal of mathematical education in science and technology*, 50(8), 1256-1272. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1522677>
- Lambdin, D. (2003). Benefits of teaching through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-Grade 6* (pp. 3–13). NCTM.
- Lamon, S. L. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The role of representations in school mathematics—2001 yearbook* (pp. 146–165). NCTM.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates
- Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5–24.
- Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 5-16.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fractions and decimals arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>.
- Méndez, M., Belmonte, J.M., Pizarro, N., & Ramírez, M. (2021). Formación matemática en el Grado de Maestro de Educación Infantil: Análisis de las guías docentes de las universidades públicas españolas. In A. Vico, L. Vega, O. Buzón (Coords.), *Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: perspectivas metodológicas*. (pp. 756-780). Dykinson.
- Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Escudero, A. M., Aguilar, Á., & Ribeiro, C. M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. In Badillo, E., Climent, N., Fernández, C., González, M. T. (Eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (p. 63-84). Ediciones Universidad Salamanca.
- Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110. <https://doi.org/10.3102/0002831208320851>
- Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educ. Psychologist* 40, 27–52. doi: 10.1207/s15326985ep4001_3
- Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, 107(3), 537–555. <https://doi.org/10.1111/bjop.12161>
- Petit, M.M., Laird, R.E., Ebby, C.B., & Marsden, E.L. (2015). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom (2nd ed.)*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315746098>

- Petit, M. M., Laird, R. E., Ebby, C.B., & Marsden, E.L. (2022). *A Focus on Fractions: Bringing Mathematics Education Research to the Classroom (3rd ed.)*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003185475>
- Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educ. Stud. Math.* 30, 5–38. doi: 10.1007/BF00163751
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplications of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3-17. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001>
- Shulman, L. (2015). PCK: Its genesis and exodus. In A. K. Berry, P. Friedrichsen & J. J. Loughran (Eds.), *Re-examining pedagogical content knowledge in science education* (pp. 3–13). Routledge
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cogn. Psychol.* 62, 273–296. doi: 10.1016/j.cogpsych.2011.03.001
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, 29(3), 75–80.
- Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293–309
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1–7.
- Thomas, M. O. J. (2008). Developing versatility in mathematical thinking. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), 67–87.
- Van de Walle, J., Karp, K., & Bay Williams, J. M. (2016). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Pearson Education, Inc.
- Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática*, 30(54), 222-239. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11>.
- Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining Interactions between Problem Posing and Problem Solving with Prospective Primary Teachers: A Case of Using Fractions. *Educ Stud Math* 96, 101–118. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9>